

L'expérience de Flammarion et comparaison avec le modèle numérique.

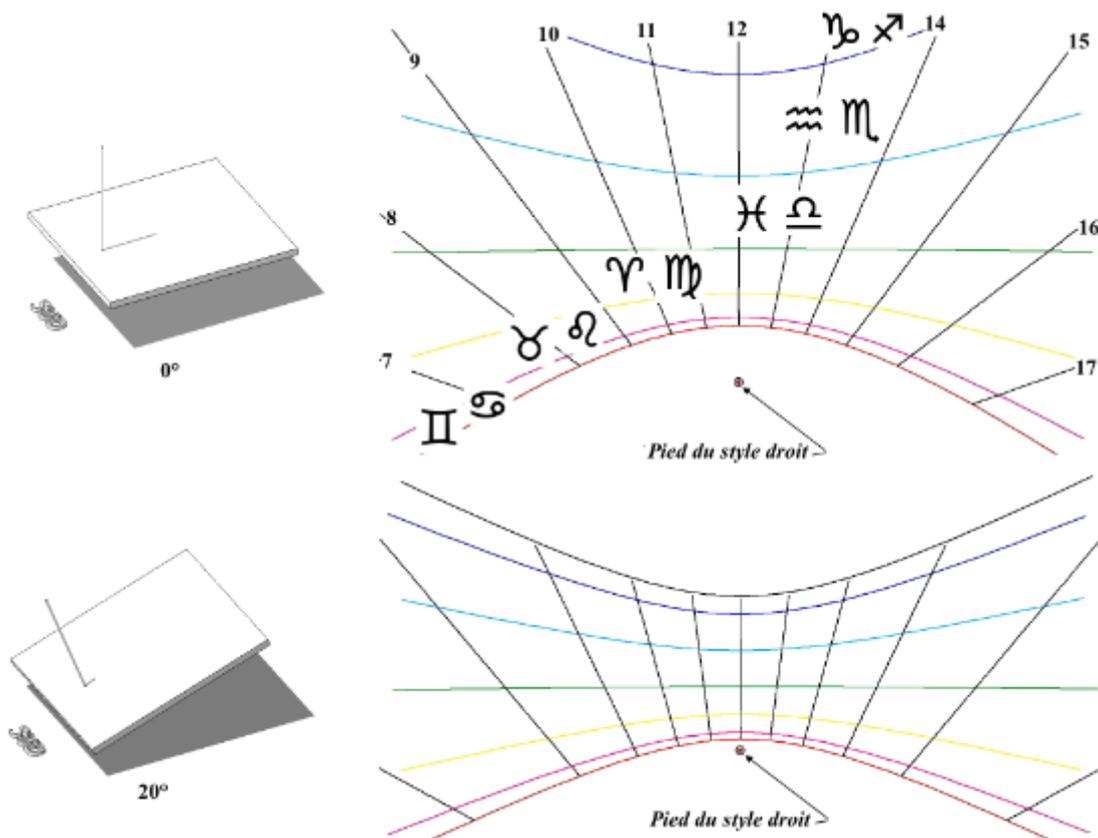
Le jour du solstice d'été à midi, Flammarion nous propose de prendre un cadran horizontal à style droit et de l'incliner progressivement vers le Sud de façon à ce que l'ombre

diminue. A partir du moment où le basculement a commencé, le tracé du cadran horizontal est faux et Flammarion n'y fait d'ailleurs plus jamais allusion.

Dans mon expérience numérique, il est facile de calculer et de re-dessiner un cadran méridional incliné à style droit pour chaque étape du basculement (Fig.1). Très vite l'ombre disparaît : le style pointe la direction du Soleil. Le mouvement de basculement doit se figer 3 ou 4 (sic) degrés après cette étape, c'est-à-dire quand une petite ombre orientée vers le Sud est apparue.

Dans les conditions de l'expérience, et selon Flammarion, l'inclinaison devrait être proche de $28,34^\circ$. C'est cette valeur, qui est cohérente avec le dessin du cadran obtenu (base du style proche mais au Nord de l'arc du solstice d'été, et donc ombre courte vers le Sud à midi le jour de ce solstice), que j'ai retenue pour l'expérience numérique. Nous avons alors un dispositif qui devrait permettre d'illustrer la rétrogradation de l'ombre.

Tout de suite une constatation, le cadran calculé pour ce cadran incliné méridional ne présente pas avec des arcs diurnes en « Z » et des lignes d'heures qui se croisent. C'est dommage, mais je m'y attendais un peu, la rétrogradation de l'ombre est un phénomène qui ne saute pas aux yeux !.



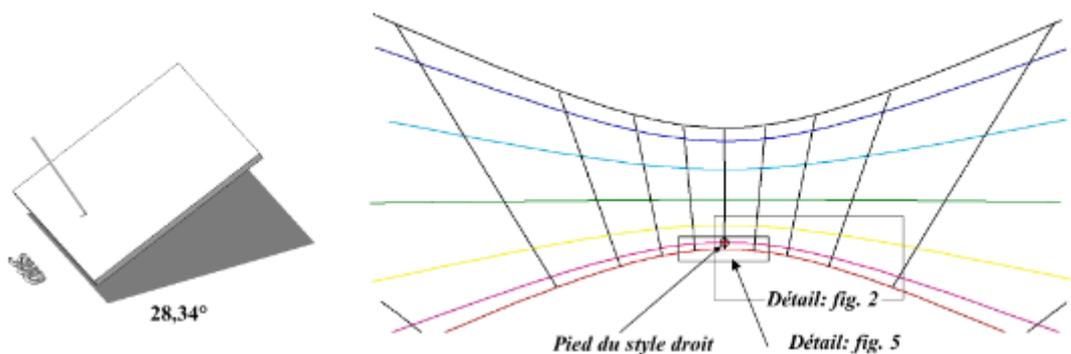
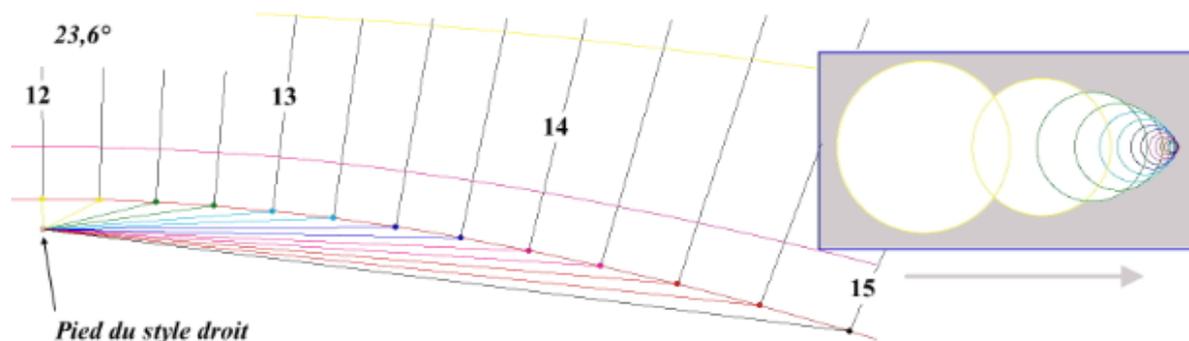


Fig.1 : La mise en place du dispositif de l'expérience et dessin du cadran correspondant à chaque étape.

Flammarion nous dit que c'est l'ombre du début d'après-midi de ce jour de solstice qui va présenter une rétrogradation. Pour suivre ce phénomène, nous allons concentrer notre attention sur la partie correspondante du cadran² (Fig. 2 localisée sur la Fig.1). Cette figure montre un extrait de trois cadrans calculés pour trois configurations différentes ; un cadran avec une inclinaison critique de 28,34° ; et pour comparaison, deux cadrans avec d'autres inclinaisons (une plus forte et une plus faible) où la rétrogradation de devrait pas avoir lieu.

Sur ces trois cadrans, le programme a calculé des lignes horaires tous les ¼ d'heures et a tracé, en couleur, les ombres du style pour ces différents instants. Chacune de ces ombres joint la base du style avec l'intersection de l'arc diurne du solstice d'été et la ligne horaire correspondante. Sur la figure, j'ai fait ajouter par le programme un petit disque à la pointe de l'ombre ; il s'agit d'une image très approximative de ce que serait l'ombre d'une bille fichée au sommet du style.

La figure 2 illustre la dynamique de l'ombre dans chacun de nos trois cadrans, les couleurs nous aident à appréhender la chronologie des étapes illustrées. Imaginons trois observateurs situés au niveau des styles et qui regardent le déplacement des ombres.



² En fait le phénomène est symétrique sur le matin, mais je ne reproduis ici que l'expérience de Flammarion.

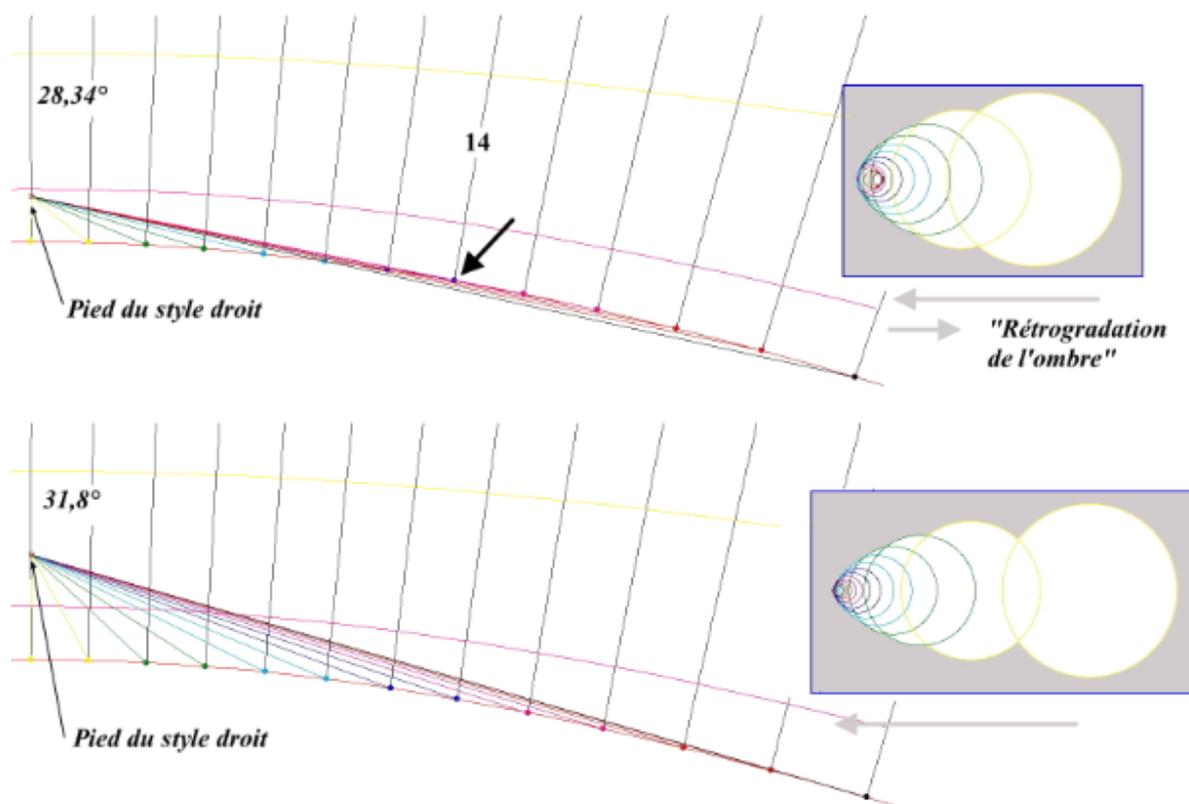


Fig.2 (suite page suivante): Agrandissement du tracé du cadran solaire (localisation figure 1) pour trois inclinaisons différentes. Les ombres sont indiquées pour chaque $\frac{1}{4}$ heure entre 12h et 15h. Seul le cadran conforme à l'expérience de Flammarion (1885) présente la rétrogradation de l'ombre. Les cartouches essaient d'illustrer ce que verrait un observateur situé au niveau du style. La tache d'ombre sommitale s'éloigne (son diamètre diminue) ; les couleurs permettent de fixer la chronologie) tout en se décalant ; soit toujours dans le même sens, soit en présentant une rétrogradation.

- dans le cas du cadran trop faiblement incliné ($23,6^\circ$), l'observateur va voir, entre 12h et 15h, la pointe l'ombre s'éloigner (la tache sommitale diminuer) mais surtout l'ombre tourner vers la droite (la valeur angulaire croît ; tableau 1)
- dans le cas du cadran trop fortement incliné ($31,8^\circ$), l'observateur va voir aussi, entre 12h et 15h, la pointe l'ombre s'éloigner (la tache sommitale diminuer) mais cette fois, l'ombre va tourner vers la gauche (la valeur angulaire décroît ; tableau 1)
- enfin, dans le cas du cadran ayant, selon Flammarion, la bonne inclinaison, la pointe l'ombre va toujours s'éloigner, mais l'ombre va d'abord aller vers la gauche, puis vers la droite. L'inversion se fait vers³ 14 h $\pm \frac{1}{4}$ h. Ce résultat est conforme à la description de Flammarion ; c'est ce phénomène que l'on appelle la « rétrogradation de l'ombre ».

Notons que, dans les conditions de latitude de l'expérience, et contrairement à ce qui se passe dans la zone intertropicale (Savoie 1997), le soleil ne passe pas deux fois au même azimut au cours de l'après-midi. c'est l'ombre et elle seule qui, sur son plan incliné, parcourt ce drôle d'itinéraire (tableau 1).

³ Le calcul réalisé avec un pas de temps plus fin permet de fixer l'inversion à 14 h 01 \pm 01'. Flammarion avait obtenu 14h12. Cette différence est en fait non-significative, l'ombre demeurant très proche de sa valeur limite (différence inférieure à $0,1^\circ$) pendant 33 minutes (13h47 à 14h20).

Heure	Azimut du Soleil	Orientation de l'ombre		
		Inclinaison du cadran		
		23,6°	28,34°	31,8°
12 h 0	0,00	0,00	180,00	180,00
12 h 15	7,98	62,61	130,61	151,71
12 h 30	15,78	76,58	114,07	133,40
12 h 45	23,27	82,24	107,64	122,97
13 h 0	30,33	85,53	104,57	116,83
13 h 15	36,90	87,84	102,95	113,00
13 h 30	42,97	89,66	102,09	110,52
13 h 45	48,56	91,19	101,68	108,87
14 h 0	53,71	92,56	101,56	107,77
14 h 15	58,45	93,82	101,63	107,05
14 h 30	62,83	95,01	101,85	106,60
14 h 45	66,90	96,15	102,18	106,37
15 h 0	70,71	97,27	102,59	106,30

Tableau 1 : Détail des résultats de calculs entre 12h et 15h (l'azimut est calculé dans le plan de l'horizon ; l'orientation de l'ombre est donnée dans le plan du cadran). Trois inclinaisons du cadran (idem figure 2) sont envisagées, en vert les données d'orientation décroissante, en rouge les données croissantes.

Commentaires et extensions de l'expérience

Chacun comprendra l'intérêt de la modélisation (expérience numérique) qui permet, *quand* le programme est validé, de recommencer l'observation à une date et heure donnée autant de fois que souhaité, et ce, après avoir éventuellement changé la valeur d'un paramètre. Dans le cas présent, l'expérience originale de Flammarion a pu être reproduite avec ses paramètres originaux ce qui valide le modèle informatique, et par voie de conséquence, les autres expériences numériques que j'ai réalisées (autres inclinaisons du cadran), ou que je vais être conduit à tenter (autres dates, autres périodes de la journée⁴)

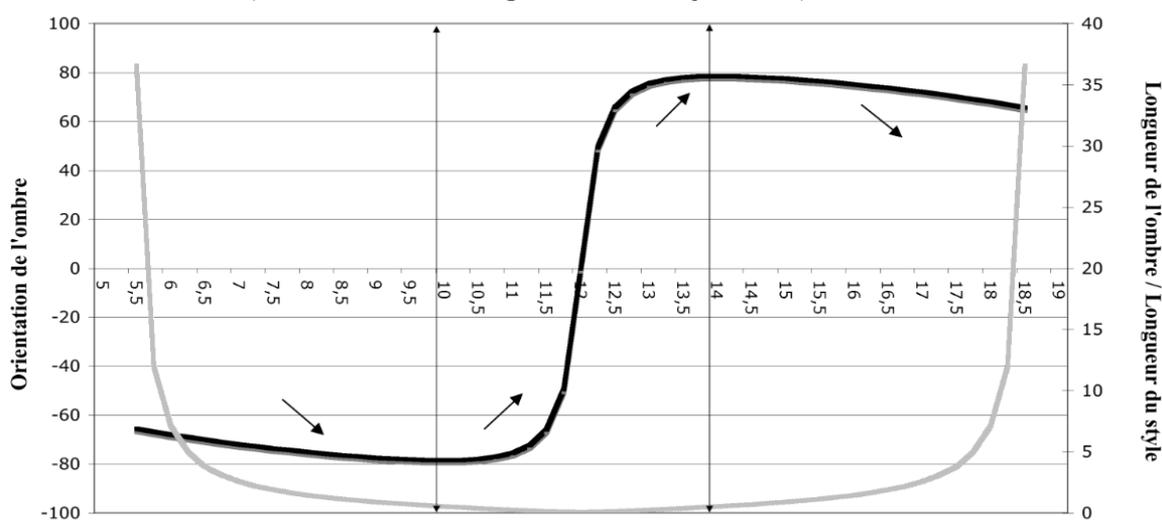


Fig.3 : Evolution de la longueur de l'ombre (en gris) et de son orientation au cours de la journée dans les conditions de l'expérience. La rétrogradation à lieu de 10h à 14 h et l'on constate que le phénomène est symétrique par rapport à midi.

⁴ et même, pourquoi pas, d'autres lieux ; mais ce n'est pas l'objet ici.

1) Ainsi, la figure 3 illustre le phénomène sur la journée. La rétrogradation a lieu de 10h à 14 h et l'on constate que le phénomène est symétrique par rapport à midi. Le changement de direction à l'air brutal sur la figure, mais il n'a lieu que quand l'ombre est très petite. Sur le cadran, la modification de trajectoire de l'ombre demeure très discrète.

2) Dans le compte-rendu de l'expérience de Flammarion, un des paramètres est fixé de façon assez arbitraire, c'est l'inclinaison du cadran qui doit être « de 3 ou 4 » degrés de plus que la position où l'ombre disparaît. Il serait intéressant de se poser la question des limites dans lesquelles peut jouer ce paramètre. La figure 4 représente l'orientation de l'ombre le matin (le phénomène étant symétrique) en fonction de l'inclinaison du cadran. On constate que :

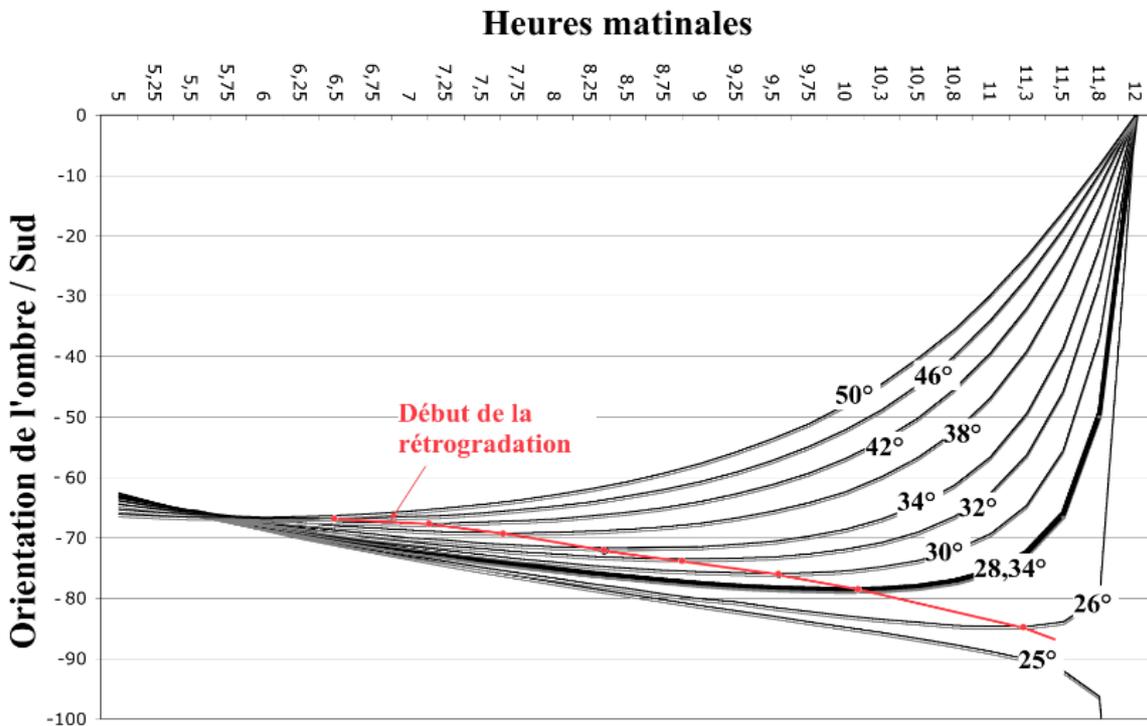


Fig.4 : Evolution de l'orientation de l'ombre le matin, en fonction de l'inclinaison du cadran.

La courbe en gras est la même que la partie gauche de la courbe de la figure 3

- quand l'inclinaison est de 25°, il n'y a pas de rétrogradation, l'ombre tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. La rétrogradation ne va commencer qu'avec une inclinaison de 25,37° c'est à dire quand le style est dans l'alignement du Soleil (latitude – déclinaison = 25,37°).
- A 26° d'inclinaison, on observe la rétrogradation, elle commence vers 11h15 (et se termine vers 12h45) et elle correspond à un déplacement de l'ombre de -87,7° à +87,5°
- Avec des inclinaisons plus importantes, la rétrogradation commence plus tôt (9h30 à 30° ; 7h15 à 42° etc... ; et son ampleur est plus faible ; respectivement 2 x 75,9° et 2 x 67,6°)
- A 50° d'inclinaison du cadran, elle disparaît. Alors que précédemment l'ombre tournait dans le sens des aiguilles d'une montre, avec un épisode de plus en plus long

de rétrogradation ; à partir de cette inclinaison toute sa trajectoire se fait dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On remarquera également que dans la figure 2, j'avais pris une inclinaison de $31,8^\circ$ pour illustrer l'absence de rétrogradation ; en fait on constate que la rétrogradation a lieu, mais de 8h45 à 15h15, soit en dehors des limites de la figure 2, elle n'est donc pas identifiable sur celle-ci.

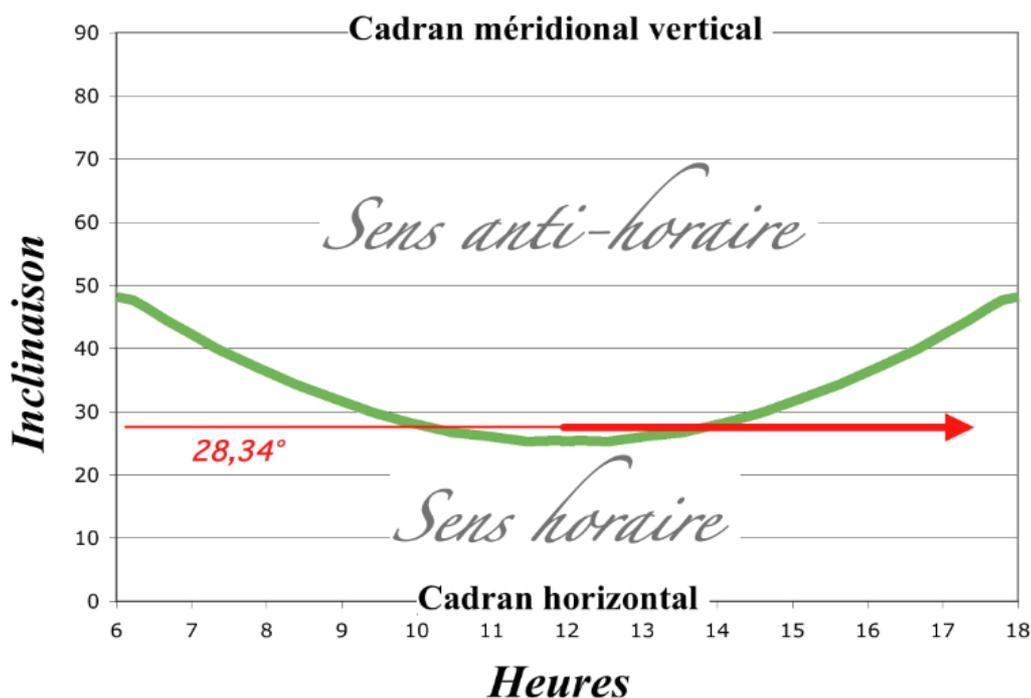


Fig. 5 : Sens de rotation de l'ombre selon l'inclinaison du cadran méridional **au solstice d'été** à Jusivy. Le passage d'un sens à l'autre se fait progressivement, cette zone intermédiaire est le domaine de la rétrogradation de l'ombre. Plus on s'éloigne du solstice, plus la limite s'horizontalise. La flèche rouge en gras indique l'expérience de Flammarion (1885)

Ces observations peuvent être analysées, sur le plan qualitatif, de la manière suivante : sur les cadrans verticaux l'ombre tourne dans le sens anti-horaire dans l'hémisphère Nord, sur les cadrans horizontaux c'est l'inverse. Au solstice d'été, si on incline un cadran pour aller d'une position extrême à l'autre, le changement de sens de rotation n'est pas homogène sur la journée: la zone de transition constitue le domaine de la rétrogradation de l'ombre (Fig. 5).

3) On peut aussi se demander sur quelle période de l'année la rétrogradation est visible à Jusivy, dans les conditions de l'expérience, c'est-à-dire avec un cadran incliné à $28,34^\circ$. Les simulations des ombres sur le cadran (Fig. 6) montrent que la rétrogradation va se manifester dès que le Soleil passe, à midi, dans l'alignement du style, c'est-à-dire vers le 21 Mai dans les conditions choisies par Flammarion. Bien sûr, la rétrogradation ne dure alors que quelques minutes. Le 26 Mai, sa durée est d'environ 2 heures et elle augmente progressivement pour atteindre environ 4 heures le jour du solstice. Corrélativement ; l'ampleur de cette rétrogradation diminue pour passer, du 26 Mai au 21 Juin, de la valeur de $2 \times 84,1^\circ$, à celle de

2 x 78,5°. Si l'on traçait une figure équivalente à la figure 5 pour d'autres périodes de l'année, on constaterait que la limite s'horizontaliserait progressivement pour s'aplatir complètement un mois avant, et après, le solstice.

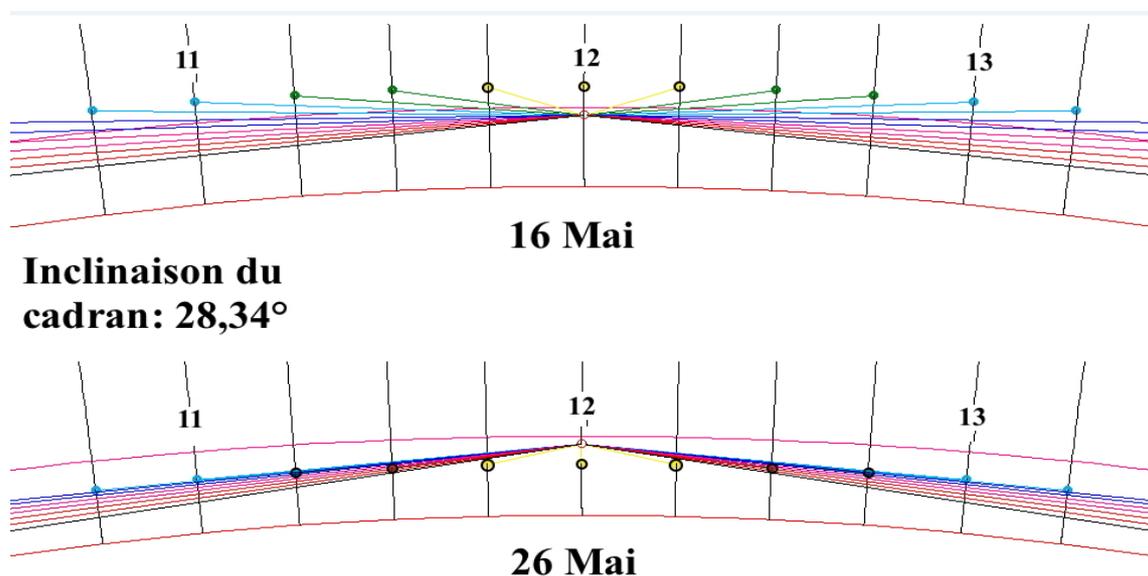


Fig.6 : Positions des ombres les 16 et 26 Mai sur des agrandissements de la région centrale du cadran solaire incliné à 28,34° (localisation fig.1). Les taches d'ombre sommitales sont situées sur l'arc diurne correspondant à la date. On constate que la rétrogradation est visible à la condition que, à midi, le soleil passe au Nord du style.

La rétrogradation est donc un phénomène que l'on peut observer à Jusivy dans des conditions moins strictes que ne l'avait laissé sous-entendre Flammarion. Avec l'inclinaison de cadran qu'il a choisie, elle est observable environ un mois avant et un mois après le jour du solstice d'été. Ce jour-là, le cadran tolère une inclinaison variant de (environ) 25,5° à 49°. Ceci dit, il est évident que les conditions fixées par Flammarion constituent un excellent compromis.

Conclusions

Sur le plan du résultat, il apparaît que la rétrogradation de l'ombre est un phénomène lent et (très) discret que seul un observateur attentif, patient et situé au niveau du style a une chance d'observer (voir par exemple la vidéo proposée dans le CD qui reproduit les conditions de l'expérience originale). On sait que dans la zone inter-tropicale, il est inutile d'incliner le cadran pour obtenir la rétrogradation à la bonne période (Flammarion 1885, Gheury 1907, Savoie 1997) ; c'est en quelque sorte le plan horizontal qui est incliné vers le Sud par rapport à nos régions. Il en découle que tout piquet respectant la verticale locale peut servir à mettre en évidence la rétrogradation. Dans son article de 1885, Flammarion s'interroge sur le fait qu'aucun voyageur n'ait mentionné le phénomène :

« il est singulier que l'on n'ait jamais remarqué le fait sous les tropiques ; il faut croire qu'on n'a jamais eu la curiosité d'y observer un cadran solaire horizontal à style vertical (sic) ».

En fait, vu la nature, la lenteur et la discrétion du phénomène, il me semble qu'il n'y a pas de quoi être pas surpris...

Bien que consacré par l'usage, le terme « rétrogradation » paraît un peu abusif, ce n'est pas l'ombre qui rétrograde mais son sens de rotation. Le terme a donc, dans ce contexte, une acceptation strictement astronomique.

Pour terminer, et puisque l'on ne peut difficilement écrire sur la rétrogradation de l'ombre sans évoquer Ezéchias, le cadran d'Achaz, et le miracle d'Isaïe ; je dirais un peu comme une boutade, que le plus grand miracle contenu dans l'anecdote biblique est le fait qu'Ezéchias, agonisant dans son lit, ait pu observer et quantifier le phénomène, ou au moins qu'il ait pu se convaincre de sa réalité !!

Références

- ° Delmotte G. (1923) ; Cadran solaire Flammarion à rétrogradation, l'Astronomie, p. 408-409
 - ° Flammarion C. (1885) ; Le cadran solaire à rétrogradation de l'Observatoire de Juvisy et le miracle d'Isaïe, l'Astronomie, p. 321-329
 - ° Gheury E.J. (1907) ; Notes sur la rétrogradation de l'ombre, Bull. Soc. Belge Astronomie, 12, 187-196.
 - ° Guillemin E. (1885) ; Théorie, formules et épures de la rétrogradation de l'ombre, l'Astronomie, p. 329-340
 - ° Ozaman J. (1778) ; Récréations mathématiques et physiques, tome III
 - ° Parisot J. P. (1985) ; La rétrogradation de l'ombre dans les cadrans solaires analemmatiques, Journal of the History of Astronomy, XVI, p. 43--48
 - ° Salibi K. (2010) ; Sundial Experiments in Abha, Saudi Arabia: Biblical Jerusalem was in that Vicinity ; (<http://kamalsalibi.blogspot.fr/2010/07/sundial-experiments-in-abha-saudi.html>)
 - ° Savoie D. (1997) ; Gnomonique moderne, Editions SAF
 - ° Savoie D. (2004) ; Les cadrans solaires, Editions Belin
- Rohr R. R. J. (1986) ; Les cadrans solaires (Histoire, Théorie, Pratique), Editions Oberlin

⇒ Dans la version numérique, vous trouverez en annexe :

- le dossier "Retrogradation E_Mercier" comprenant :
 - ° figures originales de l'article (grand format)
 - ° l'article de Flammarion (1885) pour comparaison
 - ° vidéo de la modélisation de l'expérience originale...montrant que c'est difficile à voir ! (à passer au ralenti !)

