Lignes horaires dans un cadran bifilaire incliné déclinant

Dominique Collin & Eric Mercier

On complète ici l'étude menée dans cadran Info n°28 d'octobre 2013 [Mercier & Collin] qui était consacré au cadran solaire bifilaire horizontal à styles obliques. On présente la nature des lignes horaires dans les cadrans solaires bifilaires considérés dans toute leur généralité : surface plane inclinée et déclinante et fils rectilignes disjoints, inclinés et déclinants[1]. En cela, les logiciels « Hugo.0.4c » de M. Mercier sous macintosh et le fichier programme sous Povray (fichier réalisé par M. Baillet) apportent une aide indispensable à la vérification et à l'extension de la conjecture portant sur les lignes horaires de tels cadrans.

1. Conjecture sur les lignes horaires dans les bifilaires inclinés déclinants

Proposition. Dans un cadran solaire à plan incliné déclinant muni de deux fils rectilignes quelconques[2], disjoints et supposés sans épaisseur :

[1] *Les lignes horaires sont des coniques.*

[2] *Les lignes horaires sont des branches d'hyperboles, excepté la ligne de midi qui peut être, selon la configuration du système bifilaire, une branche d'hyperbole, ou un segment de droite.*

Corollaire.
Les propositions [1] et [2] s'étendent à toute variété de cadran plan, pourvu que le système bifilaire soit composé de fils rectilignes en position quelconque au-dessus du plan, restriction faite des configurations particulières de parallélisme, de plans azimutaux parallèles, de réunions de points, et du cadran bifilaire de M. Rouxel[3].

□

Preuve.
On développe les outils qui permettent de *vérifier* par voie numérique les deux propositions, afin de pouvoir les exercer sur toute espèce de cadrans plans bifilaires, par exemple comme ceux qui ont été tracés dans le précédent article (Mercier & Collin, *op. cit.,* p. 110-112). On construira d'abord un formulaire donnant les coordonnées rectangulaires du point d'intersection des ombres dans le plan du cadran incliné déclinant. Ensuite, l'utilisation de ce formulaire *had hoc* sur une ligne horaire donnée permettra d'en déterminer le genre et d'apporter une preuve numérique, dans l'attente d'une démonstration purement géométrique...

---

[1] Aussi appelés *styles obliques*, pour les différencier notamment du style polaire.

[2] Chaque fil possède un azimut et une distance zénithale qui leur sont propres. On exclura tout cas particulier des fils : c'est-à-dire fils horizontaux, et fils placés dans des plans parallèles.

[3] B. Rouxel, « *Cadrans bifilaires : Étude géométrique* », Cadran Info n°9, mai 2004. Et aussi : « *Bifilar sundials* », The Compendium, NASS, juin 2007, vol.14, n°2, pp. 5-11. Dans ce bifilaire, le plan est polaire sud ($D=0°, I=\phi$), le premier fil est vertical : $(Az_1 ; i_1)=(0° ; 0°)$, le second est dans le premier vertical : $(Az_2 ; i_2)=(\pm 90° ; 0° < i_2 < 90°)$. Cette configuration produisant des lignes horaires parallèles est unique.

Détaillons les étapes clefs de la *vérification* de cette *conjecture*. On détermine d'abord les paramètres angulaires des fils nécessaires à l'élaboration d'une théorie du bifilaire incliné déclinant. En effet, la déclinaison gnomonique des fils et leur distance zénithale ne peuvent être utilisées telles quelles : il est nécessaire de les transformer afin de les rendre utilisables dans le plan du cadran. C'est pourquoi on définit la position angulaire des fils par rapport à la ligne de plus grande pente et leur inclinaison sur le plan du cadran. Cela permet d'établir assez facilement, dans un repère arbitrairement choisi, les coordonnées cartésiennes du point d'intersection existant entre les ombres des fils. De ce formulaire, à angle horaire constant, on extrait les coordonnées de six points de la ligne horaire choisie, puis on applique le théorème de Pascal sur les sections coniques (*cf.* D. Collin, « *Lignes horaires dans un cadran bifilaire* », Cadran Info n°28, octobre 2013, p. 29-45). À partir de là, s'il s'agit bien d'une conique, le discriminant de son équation cartésienne nous renseigne sur son genre. D'où une validation des propositions [1] et [2].
Des exemples numériques variés sont proposés, et on a préféré choisir plus concrètement cinq faces[4] d'un polyèdre régulier : le dodécaèdre. Il est tel qu'il repose sur une face avec comme contraintes une face plein nord et une arête plein sud. Les tracés des cadrans bifilaires sur cinq de ces faces se trouvent placés à la fin de l'article (*cf.* planches, cadrans n°1 à 5.).

■

2. Coordonnées rectangulaires du point d'intersection des ombres des fils

a-1) Installation des styles obliques au-dessus d'un plan incliné déclinant

Considérons un point M_{k0}, point d'implantation d'un style non nécessairement polaire. Le style oblique numéro k désigné par F_k[5], est contenu dans un plan vertical d'azimut Az_k et possède une certaine distance zénithale i_k (on exclu le cas du fil horizontal). L'extrémité de F_k est le point N_k qui est lui-même l'extrémité du style droit associé (O_kN_k est le style droit de F_k ; *cf.* fig. 3). Utiliser les paramètres classiques $(Az_k ; i_k)$ pour installer le style oblique au-dessus d'un plan incliné déclinant n'est pas du tout aisé. On préférera plutôt se servir d'angles directement utilisables depuis la surface du plan incliné déclinant : ce sont les paramètres angulaires $(\beta_k ; f_k)$ (voir fig. 1 et 3) :

- f_k est l'angle entre le style oblique F_k et sa sous-stylaire. C'est la hauteur du style oblique sur le plan incliné déclinant.
- β_k est l'angle entre la ligne de plus grande pente (LPGP) et la sous-stylaire associée à F_k – il est compté positivement dans le sens trigonométrique depuis le plus haut de la LPGP. Il permet de positionner la sous-stylaire sur la surface du cadran.

Les formules (1) et (2) donnent les relations de passage entre ces deux espèces de paramètres angulaires. La figure 1 montre sur la sphère céleste de centre O_k, la correspondance qu'il peut y avoir entre les paires $(Az_k ; i_k)$ et $(\beta_k ; f_k)$ du style oblique numéro k. On considérera les styles dans toute leur généralité, mais on exclura tout parallélisme avec le cadran. Rappelons enfin que D et I sont respectivement la déclinaison gnomonique et la distance zénithale du plan incliné déclinant.

---

[4]Les normales des cinq faces pointent dans des directions situées au-dessus de l'horizon. Dit autrement, ce sont les cinq faces adjacentes à la face supérieure horizontale du dodécaèdre.
[5] *k=1* pour le premier style, *k=2* pour le deuxième.

Les analogies de Néper dans le triangle sphérique ZNN_k, permettent de calculer, sans aucune ambiguïté de signe, l'angle β_k. On calculera donc successivement :

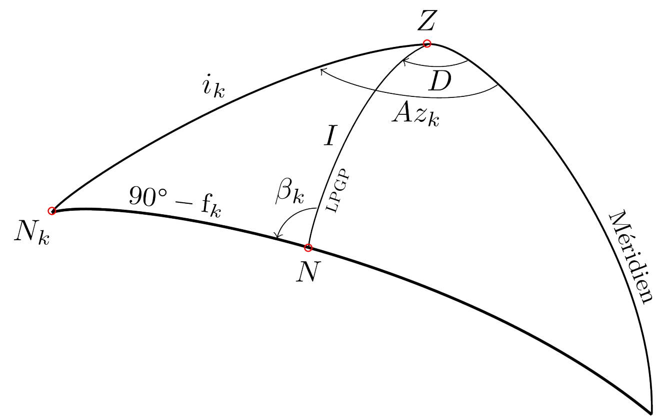


Figure 1 : Correspondance entre les paires $(Az_k; i_k)$ et $(\beta_k; f_k)$ dans le triangle sphérique ZNN_k.
Z est le zénith du lieu, *N* est la normale au plan incliné déclinant et N_k l'extrémité du style oblique F_k.

$$\tan\left(\frac{\beta_k - N_k}{2}\right) = \cot\left(\frac{Az_k - D}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{i_k - I}{2}\right)}{\sin\left(\frac{i_k + I}{2}\right)} \quad , \quad \tan\left(\frac{\beta_k + N_k}{2}\right) = \cot\left(\frac{Az_k - D}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{i_k - I}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_k + I}{2}\right)}$$

Puis, par simple addition après extraction des angles, on accède à l'angle β_k. On peut proposer la relation suivante qui calcule directement cet angle :

$$\beta_k = \arctan\left[\cot\left(\frac{Az_k - D}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{i_k - I}{2}\right)}{\sin\left(\frac{i_k + I}{2}\right)}\right] + \arctan\left[\cot\left(\frac{Az_k - D}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{i_k - I}{2}\right)}{\cos\left(\frac{i_k + I}{2}\right)}\right] \qquad (1)$$

Le calcul de l'angle f_k s'obtient en appliquant le théorème du cosinus dans le même triangle sphérique ZNN_k. On a, là aussi sans aucune ambiguïté d'angle $(0 \leqslant f_k \leqslant 90°)$:

$$\sin(f_k) = \cos(i_k)\cos(I) + \sin(i_k)\sin(I)\cos(Az_k - D) \qquad (2)$$

A partir de ces relations, on peut installer sans trop de difficultés[6], chacun des styles au-dessus du plan incliné déclinant. Pour des exemples numériques, voir ceux du paragraphe 2-d.

a-2) Remarque importante sur l'orientation des styles obliques (M. Mercier) :

[6] C'est vraiment relatif... Un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le style oblique, puis un des côtés de l'angle droit le style droit associé, avec le dernier côté (la sous-stylaire) posé sur le plan incliné déclinant, donne une bonne idée d'un style oblique dans ce système bifilaire.

Dans *Cadran-Info* n°28, nous avions proposé une approche beaucoup plus empirique du tracé de la table d'un cadran bifilaire incliné déclinant, ainsi qu'un logiciel de dessin : « *Hugo.0.4c* ». La nomenclature de description angulaire des gnomons filaires utilisée dans ce logiciel n'est cohérente ni avec les règles classiques de la gnomonique, ni avec l'outil informatique proposé ici (à l'époque nous avions choisi de privilégier la cohérence avec une version précédente du logiciel qui ne traitait que des cadrans bifilaires horizontaux). Dans « *Hugo.0.4c* », la géométrie des gnomons filaires est définie par rapport (1) à la normale de la table et (2) à la ligne de plus grande pente. L'affinité avec (β) et (f) (*cf.* fig. 3) est dès lors évidente. Les équivalences sont données dans le tableau suivant :

Fichier Excel : « *PID_bifilaire qcq_2013.xls* »	Logiciel *Hugo.0.4c*
Il faut calculer β_k	Il faut saisir $Az_k^{Hugo} = -\beta_k$
Il faut calculer f_k	Il faut saisir $i_k^{Hugo} = \overline{f}_k$ [7]

Il va de soit que si l'on démarre l'étude d'un cadran avec les azimut et distance zénithale de chaque gnomon filaire, il faut d'abord calculer, pour chacun d'eux, les angles β et f, ensuite les convertir selon cette règle, puis les introduire comme paramètre d'entrée dans le logiciel « *Hugo.0.4c* » pour produire le bon dessin du cadran[8].

Avant de proposer des exemples d'application, pour ensuite poursuivre la démonstration des deux propositions et du corollaire, on donne les relations de passage entre les paramètres angulaires utilisés par le logiciel « *Hugo.0.4c»* (paramètres in-situ) et les paramètres angulaires classiques des styles. De la sorte, on peut passer de l'un à l'autre en toute transparence (*cf.* fig. 1) et ainsi comparer les tracés avec d'autres logiciels.

(a) $$\cos(i_k) = \cos(I)\cos(i_k^{Hugo}) + \sin(I)\sin(i_k^{Hugo})\cos(-Az_k^{Hugo})$$

(b) $$Az_k = D + \arctan\left[\cot\left(\frac{-Az_k^{Hugo}}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{I - i_k^{Hugo}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{I + i_k^{Hugo}}{2}\right)}\right] - \arctan\left[\cot\left(\frac{-Az_k^{Hugo}}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{I - i_k^{Hugo}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{I + i_k^{Hugo}}{2}\right)}\right]$$

Exemples numériques

ex. 1) Considérons un plan incliné déclinant (c*f.* fig. 5, cadran n°1) à la latitude de Nice $(\phi = 43°43'N.)$ tel que D = +36° et I = 63° 26' 05,815", puis deux styles installés au-dessus de ce plan, tels que, pour le premier : (Az_1 ; i_1) = (125° ; 15°), et pour le deuxième :

[7] $\overline{f}_k = 90° - f_k$

[8] Les notations utilisées dans le logiciel « *Hugo.0.4c* » : Az_k et i_k, ne sont pas vraiment appropriées pour le plan incliné déclinant, car elles n'ont pas le même sens que les Az_k et i_k utilisés pour les fils dans l'étude gnomonique proposée ici. L'équivalence ne vaut que lorsque le plan du cadran est horizontal. Il faudra donc éviter cette confusion dans les angles des gnomons lorsqu'on se servira du logiciel pour tracer un bifilaire incliné déclinant.

(Az_2; i_2) = (-120° ; 0°)[9]. Les valeurs à saisir dans le logiciel « *Hugo.0.4c* » pour obtenir un tracé correct du cadran seront par conséquent :

Fil 1	Logiciel *Hugo.0.4c*
$\beta_1 = 16°{,}71$	Az_1 = -16°71
f_1 = 25°,85	i_1 = 64°,15

Fil 2	Logiciel *Hugo.0.4c*
$\beta_2 = 0°$	Az_2 = 0°
f_2 = 26°,57	i_2 = 63°,43

ex. 2) Proposons un problème inverse : retrouver les caractéristiques classiques des gnomons lorsqu'on connaît celles qui ont été utilisées sous « *Hugo.0.4c* ». Par exemple, le cadran numéro N de la figure 8 de la précédente étude (cf. Mercier & Collin, *op. cit.*, p. 112) a comme caractéristique pour le logiciel « *Hugo.0.4c* » :

	D	I	Az_1	Az_2	i_1	i_2	x_{20}	y_{20}
Fig. 8-N	35°	45°	-220°	120°	45°	15°	50	-150

(voir note n°8)

Quels sont alors les paramètres angulaires classiques $(Az_k ; i_k)$ de chacun des fils ?

Solution :
On utilise directement les relations (a) et (b). On a donc (les décimales sont superflues et servent de vérification) :

	D	I	Az_1	Az_2	i_1	i_2	x_{20}	y_{20}
Fig. 8-N	35°	45°	7°,76369°	18°,85969	83°,28229	53°,73602	50	-150

Ce sont ces valeurs qu'il faut utiliser par exemple sous *Povray* ou dans le tableur Excel « *PID_bifilaire qcq_2013.xls* », si l'on veut reproduire fidèlement le tracé effectué par le logiciel « *Hugo.0.4c.* » On se rend bien compte qu'il sera assez difficile pour le gnomoniste de les utiliser tel quel sur le terrain pour positionner les styles... On trouvera en figure 10 une reproduction du tracé. Revenons-en maintenant au fil conducteur de notre preuve des propositions.

b) Coordonnées de l'extrémité de l'ombre d'un style oblique dans un plan incliné déclinant

Examinons la figure 2 ci-après. On considère dans le plan incliné déclinant le repère $M_{10}xy$ dans lequel M_{10}, pris pour origine, est le pied du premier gnomon, $M_{10}x$ l'axe horizontal, perpendiculaire à la ligne de plus grande pente et orienté vers la droite pour un observateur regardant le cadran, et enfin $M_{10}y$ l'axe des ordonnées, orienté le long de la ligne de plus grande pente vers le haut. Les segments [$M_{k0}P_k$] sont les ombres des styles obliques. Les segments [O_kP_k] sont les ombres des styles droits associés aux styles obliques. Et enfin les segments [$M_{k0}O_k$] sont les sous-stylaires de position angulaire β_k.

Pour simplifier les écritures, prenons un indice quelconque k. On détermine les coordonnées de l'extrémité P_k de l'ombre [$M_{k0}P_k$] d'un style F_k à partir des expressions suivantes :

[9] L'azimut du deuxième gnomon importe peu puisqu'il est vertical (i_2=0°).

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k0} \\ y_{k0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -l_k \cos f_k \sin \beta_k \\ l_k \cos f_k \cos \beta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_k \sin f_k \dfrac{\sin \psi}{\tan \bar{\zeta}} \\ -l_k \sin f_k \dfrac{\cos \psi}{\tan \bar{\zeta}} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Les angles psi et zêta seront explicités un peu plus loin. l_k est la longueur du style oblique n°k. Il est clair que le point P recherché est à l'intersection des segments $[M_{10}P_1]$ et $[M_{20}P_2]$. Ces segments ont respectivement pour équation : $y = m_1 x + p_1$ et $y = m_2 x + p_2$. Les coefficients directeurs étant :

$$m_k = \frac{\cos f_k \cos \beta_k - \sin f_k \dfrac{\cos \psi}{\tan \bar{\zeta}}}{\sin f_k \dfrac{\sin \psi}{\tan \bar{\zeta}} - \cos f_k \sin \beta_k} \tag{4}$$

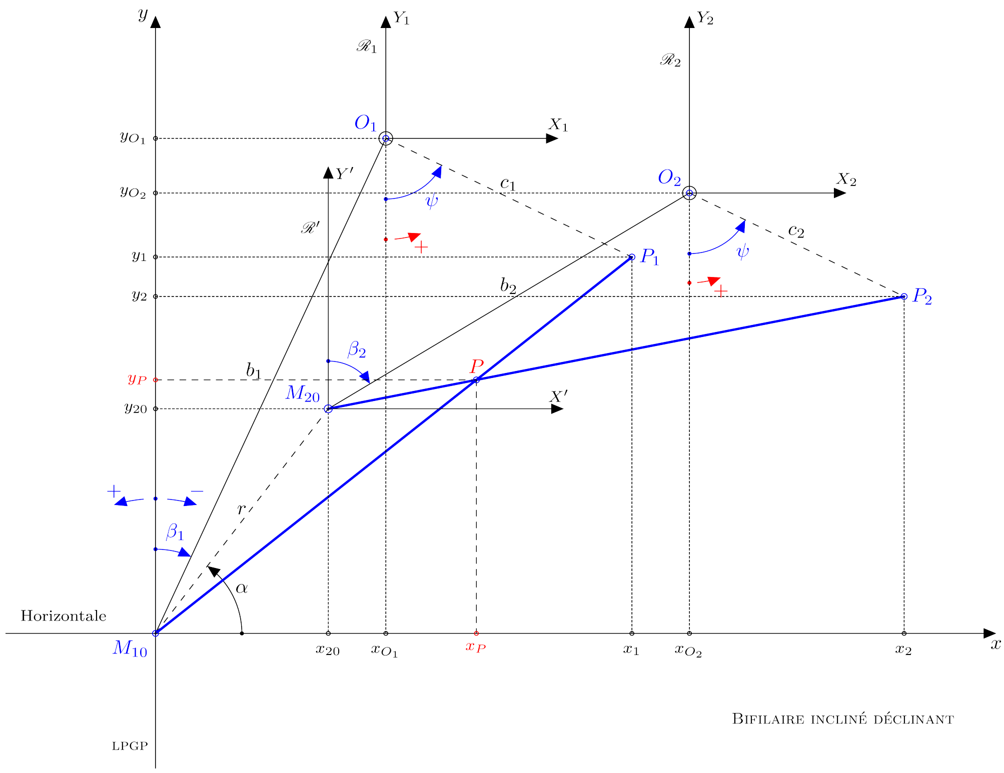


Figure 2 : Géométrie des principaux éléments du bifilaire dans le plan incliné déclinant.

Les ordonnées à l'origine des droites sont :

$$p_1 = 0 \ \text{ et } \ p_2 = y_{20} - m_2 x_{20} \tag{5}$$

Le point $P(x_p; y_p)$ est alors solution d'un système de deux équations à deux inconnues : $\begin{cases} m_1 x - y = 0 \\ m_2 x - y = -p_2 \end{cases}$,
qui admet pour unique solution le couple de coordonnées :

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{m_2 x_{20} - y_{20}}{m_2 - m_1} \\ y_P = m_1 x_p \end{cases}, \qquad (6)$$

à la condition expresse que $m_2 - m_1 \neq 0$.

Les relations (4) et (6) permettent de calculer les coordonnées du point d'intersection des ombres des deux fils. On trouvera des exemples numériques au paragraphe 3, en particulier à angle horaire constant, nécessaires pour des besoins de vérification sur la nature et le genre des lignes horaires (*cf. infra*). Reste à déterminer les angles psi et zêta. Ils jouent le même rôle que l'azimut et la hauteur du soleil dans le repère topographique[10]. Bien que ces angles se retrouvent dans bien des études de gnomonique, leur calcul fait l'objet du paragraphe suivant.

c) Angles zêta et psi relatifs au style droit dans un PID[11]

On se référera aux figures 3 et 4 ci-dessous qui sont suffisamment explicites.

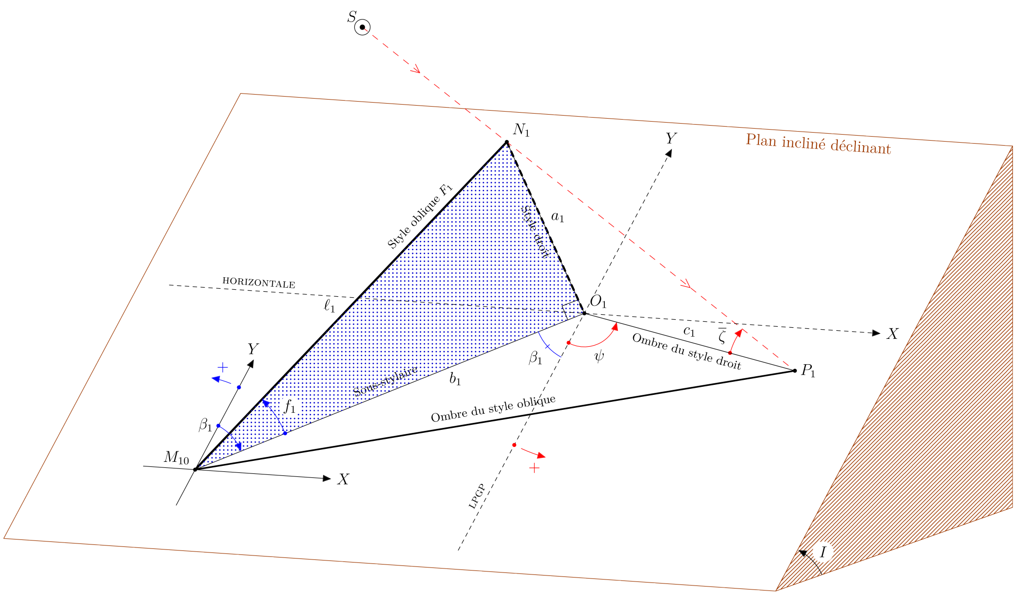


Figure 3. Exemple de configuration du gnomon F_1 et position de l'ombre du style droit dans le plan du cadran. Le style oblique F_2 donnerait une même configuration avec M_{20} comme point d'implantation.

[10] Dans le repère topographique, *Ox'*=Est, *Oy'*=Nord et *Oz'*=Zénith du lieu.
[11] Voir aussi avec un intérêt certain : D. Savoie, « Plan incliné et déclinant », Cadran-Info n°9, mai 2004.

ζ (zêta) est l'angle entre la direction du style droit et le rayon du soleil. Identique pour les deux styles droits associés aux styles obliques, il se détermine sans ambiguïté à partir de la formule :

$$\cos\zeta = \cos I \sin h + \sin I \cos h \cos(Az - D) \tag{7}$$

L'angle réellement utilisé est $\bar{\zeta}$, hauteur du soleil au-dessus du plan incliné déclinant. L'intersection des ombres des styles obliques aura une signification gnomonique si et seulement si $0° < \bar{\zeta} < 90°$ – bien entendu, ce n'est pas le seul critère qui permet d'éliminer les intersections aberrantes dans le tracé par logiciel – c*f.* Mercier & Collin, *op. cit.,* §3, p. 105-106.

ψ (psi) est l'angle fait par l'ombre du style droit associé au style oblique avec la ligne de plus grande pente. De centre O_k, il est mesuré depuis le plus bas de la ligne de plus grande pente (*cf.* fig. 2 et 3), et est compté positivement dans le sens trigonométrique. Il se détermine sans aucune ambiguïté à partir des analogies de Néper.

$$\psi = \arctan\left[\cot\left(\frac{Az-D}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{I-\bar{h}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{I+\bar{h}}{2}\right)}\right] - \arctan\left[\cot\left(\frac{Az-D}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{I-\bar{h}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{I+\bar{h}}{2}\right)}\right] \tag{8}$$

(avec $\bar{h} = 90° - h$).

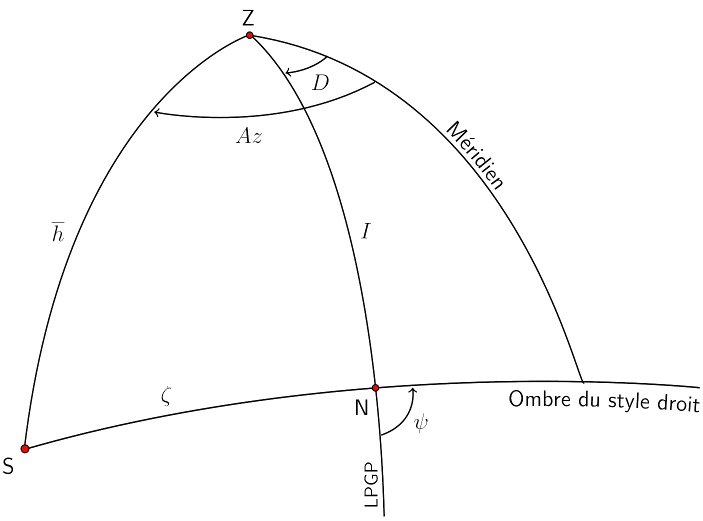


Figure 4. Définition des angles psi et zêta dans le triangle sphérique de position *ZSN*.

d) Exemples numériques

Considérons le plan incliné déclinant à la latitude $\phi = 43°43'$ *N.* de l'exemple 1 précédent (*cf.* fig. 5). Les fils ont les mêmes caractéristiques. Quelles sont les coordonnées $(x_p ; y_p)$ du point d'intersection des ombres produit par les deux fils au solstice d'hiver à 15 h de temps vrai ?

Solution : (les décimales sont volontairement augmentées à des fins de vérification)
On calcule d'abord les angles β_k et f_k positionnant chaque style au-dessus du plan :

$\beta_1 = 16°,71147$ $\beta_2 = 0°$

$f_1 = 25°,84992$ $f_2 = 26°,56505$.

Puis, on a successivement :

$\delta = -23°26'$ $AH = 45°$

$h = 11°,19136$ $Az = 41°,40392$

$\xi = 73°,80490$ $\psi = 160°,65598$ (on vérifie bien que $0° < \xi < 90°$)

$m_1 = -4,52612$ $m_2 = 23,63786$

$x_p = -41,60963$ $y_p = 188,33028$

Au solstice d'été à 17 h de temps vrai, on aura :

$\delta = 23°26'$ $AH = 75°$

$h = 26°,51756$ $Az = 97°,92135$

$\xi = 35°,19568$ $\psi = 75°,03762$ (on vérifie bien que $0° < \xi < 90°$)

$m_1 = 2,07511$ $m_2 = 1,19288$

$x_p = 56,27082$ $y_p = 116,76815$

3. Nature des lignes horaires au cas par cas – Exemples numériques.

On propose un certain nombre d'exemples numériques pour illustrer les propositions énoncées sur les lignes horaires. On a choisi la latitude de Nice : $\phi = 43°43' N.$, sans considération de longitude $(\lambda = 0)$ ou de fuseau horaire. Les plans inclinés et déclinants sont ceux d'un dodécaèdre posé sur une face et orienté de telle façon qu'une des faces inclinées soit plein nord avec une arête placée dans le plan méridien. Les paramètres de chaque face sont inscrites sur les figures. Les résultats des calculs sur des lignes horaires choisies comme on veut sont regroupés dans les tableaux ci-dessous. Pour chaque ligne horaire, les points sont pris dans l'ordre des déclinaisons croissantes. On rappelle que le critère n°1 est une application du théorème de Pascal sur les sections coniques. Sa mise en œuvre a déjà été décrite (D. Collin, *op. cit.*, p. 30-34). Le critère n°2, qui a le même but que le critère n°1, est issu quand à lui de la géométrie projective et peut être considéré comme un peu plus sophistiqué, et plus simple à mettre en œuvre[12]. Enfin, la dernière colonne de chaque tableau donne le genre de la ligne horaire. Tous ces résultats sont extraits des fichiers du tableur *Excel* prévus à cet effet[13] ; le fichier *Povray* fourni par M. Baillet donne les mêmes résultats pour chacun des cadrans (et on rappelle qu'il n'y a aucune formule de calcul de coordonnées dans le programme 3D). Les propositions [1] et [2] sont ainsi largement *vérifiées*.

[12] D'après une suggestion de M. Mercier, on a plutôt considéré la différence relative des produits des déterminants, à savoir : $diff = \frac{[a,d,e][b,c,e][a,b,f][c,d,f] - [a,b,e][c,d,e][a,d,f][b,c,f]}{[a,d,e][b,c,e][a,b,f][c,d,f]}$. Elle doit tendre vers zéro lorsque la ligne horaire étudiée est une conique. Voir à ce sujet la feuille nommée « *Théorème de conicité* » , du classeur excel : *TheoremeConique_CI29_v2*. Cet ajout constitue la révision n°2 du fichier qui se trouve en annexe à *Cadran-Info* (version CD-Rom).

[13] Le fichier Excel « *PID_bifilaire qcq_2013.xls* » se trouve également en annexe à *Cadran-Info*.

***Cadran 1** (Fig. 5).*

Ligne de 11 h :

n°	*Coordonnées des points*[14] x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-143,407114897	136,884111924	$\mu_1 = 1{,}03172321$ $\mu_2 = 1{,}03172321$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx 2\times10^{-13}$	Hyperbole
M_2	-142,952545388	134,261774544			
M_3	-142,499402066	131,616084503			
M_4	-142,047750196	128,944470692			
M_5	-141,597715534	126,244265767			
M_6	-141,149495432	123,512694512			

Ligne de 12 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-100,39986336647	145,11482861202	$\mu_1 = 1{,}06074344$ $\mu_2 = 1{,}06010030$ $\mu_1 \approx \mu_2$	$diff = 0$	Hyperbole
M_2	-99,72828613794	143,04792644710			
M_3	-99,05248840599	140,96803490841			
M_4	-98,37185929459	138,87327391279			
M_5	-97,68577101292	136,76171131888			
M_6	-96,99357644302	134,63135550233			

Ligne de 17 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	13,9937163851	192,8238991411	$\mu_1 = 1{,}20478109$ $\mu_2 = 1{,}20478109$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx 1{,}3\times10^{-10}$	Hyperbole
M_2	21,7542830889	180,1900682803			
M_3	29,6947588311	166,8765157039			
M_4	38,0032477999	152,3782447636			
M_5	46,8457907804	136,0124676321			
M_6	56,2708185517	116,7681528087			

***Cadran 2** (Fig. 6)*

Ligne de 12 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-175,299566366122	-266,295809967316		$diff \approx 3{,}8\times10^{-12}$	Hyperbole
M_2	-125,744434308990	-235,387763361944			

[14] Le nombre de décimales est volontairement exagéré…

M_3	-103,480042620125	-222,337168051732			
M_4	-84,746577671620	-211,934164206405			
M_5	-79,104031636651	-208,926945962438			
M_6	-73,712855062984	-206,115778394344			

Ligne de 13 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-107,6566364397	-116,7639505605	$\mu_1=0{,}81517326$ $\mu_2=0{,}81517326$ $\mu_1=\mu_2$	$diff \approx -2{,}9\times10^{-10}$	Hyperbole
M_2	-88,1857343227	-116,2243483341			
M_3	-77,9555743244	-116,2343265163			
M_4	-65,4950169537	-116,5629263479			
M_5	-59,6482666265	-116,8487215322			
M_6	-52,6569237981	-117,3097844296			

Ligne de 16 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-47,0159227960	-12,5694917878		$diff \approx 3{,}7\times10^{-10}$	Hyperbole
M_2	-42,2669019784	-17,5601221189			
M_3	-38,2141159749	-21,6362757682			
M_4	-33,9139049974	-25,8286128765			
M_5	-29,3278091906	-30,1842311196			
M_6	-25,6679126963	-33,5917884097			

***Cadran 3** (Fig. 7)*

Ligne de 10 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	213,3859992765	-442,3298689855	$\mu_1=0{,}79980733$ $\mu_2=0{,}79980733$ $\mu_1=\mu_2$	$diff \approx -3{,}9\times10^{-10}$	Hyperbole
M_2	140,5525254469	-310,5913384340			
M_3	102,0641602641	-241,1025611327			
M_4	78,2155398519	-198,1447698519			
M_5	61,9564592667	-168,9387210160			
M_6	50,1380239551	-147,7769106049			

Ligne de 12 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*

M_1	-15,137900796265	-1097,738461738920	$\mu_1=0{,}76958236$ $\mu_2=0{,}76958236$ $\mu_1=\mu_2$	$diff \approx 5{,}1\times10^{-12}$	Hyperbole
M_2	-15,297945768555	-513,447324417666			
M_3	-15,455439449447	-339,352233720936			
M_4	-15,610536095670	-255,685719589571			
M_5	-15,763382424431	-206,493913403707			
M_6	-15,978814952992	-163,246535048922			

Ligne de 14 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-124,9316677359	-216,7847576439	$\mu_1=0{,}79980733$ $\mu_2=0{,}79980733$ $\mu_1=\mu_2$	$diff \approx 1{,}2\times10^{-9}$	Hyperbole
M_2	-91,4957131364	-155,8925127119			
M_3	-73,9296148668	-123,7733777121			
M_4	-63,1255037898	-103,9174074241			
M_5	-55,8249613590	-90,4177739322			
M_6	-50,5728138464	-80,6363520706			

***Cadran 4** (Fig. 8)*

Ligne de 7 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	12,9997552153	-11,0556709924	$\mu_1=1{,}06776821$ $\mu_2=1{,}06776821$ $\mu_1=\mu_2$	$diff \approx 1{,}5\times10^{-10}$	Hyperbole
M_2	12,0041452381	-15,4936282983			
M_3	9,8743760493	-22,4536216437			
M_4	7,8417728754	-28,0844883379			
M_5	4,7651323965	-35,8233040823			
M_6	-1,6040423092	-50,4593568891			

Ligne de 11 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	299,8215428283	-156,9437130811	$\mu_1=0{,}78617794$ $\mu_2=0{,}78617794$ $\mu_1=\mu_2$	$diff \approx -2{,}6\times10^{-12}$	Hyperbole
M_2	146,8113512900	-137,0240799718			
M_3	104,4604603933	-136,7499472645			
M_4	80,2237457854	-139,3257073209			
M_5	40,4502330908	-151,4338154752			
M_6	33,2317341492	-155,1279352438			

Ligne de 12 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	180,575012569614	-308,469425557491	$\mu_1 = 1{,}06344297$ $\mu_2 = 1{,}06344297$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx 1{,}2 \times 10^{-13}$	Hyperbole
M_2	144,323932821130	-288,063915005486			
M_3	125,146068066643	-278,227985560504			
M_4	101,361188591465	-267,356758544338			
M_5	70,3039932574190	-256,373983277163			
M_6	54,9273647735230	-252,851710928197			

Cadran 5 *(Fig. 9)*

Ligne de 6 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-137,1641286478	-20	$\mu_1 = 0{,}74780370$ $\mu_2 = 0{,}74780370$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx 7{,}4 \times 10^{-12}$	Hyperbole
M_2	-145,7029892732	-38,1588869001			
M_3	-145,9482341635	-49,9331052831			
M_4	-141,2819914345	-53,8382615345			
M_5	-134,7068815132	-54,7995187259			
M_6	-129,8352151769	-54,4839486392			

Ligne de 9 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	-20,9274999300	-43,6075837397	$\mu_1 = 0{,}89299027$ $\mu_2 = 0{,}89299027$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx 1{,}6 \times 10^{-9}$	Hyperbole
M_2	-28,3074514544	-57,3548963950			
M_3	-35,6310395670	-70,9474621333			
M_4	-50,1039250377	-97,7386122402			
M_5	-60,4606820834	-116,8803219248			
M_6	-67,9726704613	-130,7553449165			

Ligne de 12 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	46,357632900643	-68,318340697959	$\mu_1 = 0{,}86129276$ $\mu_2 = 0{,}86129276$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx 4{,}6 \times 10^{-13}$	Hyperbole
M_2	42,844218682741	-81,799973184108			
M_3	33,909890577420	-113,948759435239			
M_4	30,295135964501	-126,443481088518			

M_5	20,868513290009	-158,232475909105			
M_6	16,668031002907	-172,136734257948			

Ligne de 14 h :

n°	*Coordonnées des points* x_i	*Coordonnées des points* y_i	*Critère 1*	*Critère 2*	*Genre*
M_1	141,0073501479	-80,5013378966	$\mu_1 = 0{,}7843088$ $\mu_2 = 0{,}7843088$ $\mu_1 = \mu_2$	$diff \approx -4{,}2 \times 10^{-11}$	Hyperbole
M_2	141,8410180309	-119,8883430243			
M_3	141,6288998243	-164,1477562218			
M_4	140,0701696918	-231,5333686868			
M_5	138,8539615031	-268,1347144531			
M_6	138,2343633257	-284,9803449967			

Conclusion.

Pour déterminer la nature des lignes horaires dans un cadran solaire bifilaire inclinée déclinant, il a été nécessaire d'élaborer une théorie de ce cadran. Le formulaire *hac doc* obtenu est relativement simple en l'absence de toute question de réelle existence des intersections des ombres des gnomons filaires. D'ailleurs cette question de l'existence du point d'ombre utile dans un bifilaire pourrait tout à fait faire l'objet d'une étude spécifique. En excluant les cas particuliers de fils horizontaux (que le formulaire ne peut traiter), les critères sur les coniques appliqués aux exemples, pris ici sur les faces d'un dodécaèdre, permettent parfaitement de bien *démontrer, pour ceux-ci,* que les lignes horaires sont des sections coniques, de genre hyperbole. Par extension (en prenant donc des risques en généralisant), on admet que cela reste vrai pour tout cadran plan, en excluant des configurations très précises des fils et du plan. Dès que les styles ont un point commun, le bifilaire redevient un cadran classique avec un éventail horaire rectiligne et convergent. La désolidarisation du style polaire ou droit, en deux styles rectilignes en position quelconque au-dessus du cadran, engendre des lignes horaires qui sont des branches d'hyperboles. Cependant, la ligne de midi fait parfois exception (comme cela avait déjà bien été remarqué sur les cadrans horizontaux) tout comme les lignes horaires du cadran bifilaire de M. Rouxel (*op. cit.*), lequel utilise une configuration particulière des fils et du plan (dont on sait qu'elle est unique) – les lignes horaires sont parallèles[15]. On ne peut donc pas dire en toute rigueur que notre conjecture – propositions [1] et [2] et son corollaire – sont entièrement démontrés[16] même si l'on a déterminé *tous* les cas où elle n'est pas vraie.

Le désir d'une autre approche est toujours présent à l'esprit et il ne fait plus de doute qu'elle permettrait de comprendre comment et pourquoi les lignes horaires présentent une telle particularité pour des configurations spatiales très variées des fils au-dessus de n'importe quelle surface plane inclinée déclinante.

[15] La recherche de lignes horaires parallèles dans les cadrans bifilaires plans est un autre type de préoccupation dans la théorie des bifilaires. Pour en savoir davantage sur les dernières avancées, voir B. Rouxel, « *Some new bifilar sundials* », The Compendium, NASS, décembre 2013, Vol. 20, n°4, pp. 20-24.

[16] Elle est démontrée pour les plans horizontaux seulement.

Planches

Lignes horaires dans les cadrans solaires bifilaires inclinés déclinants

Figure 5. ***Cadran 1.***

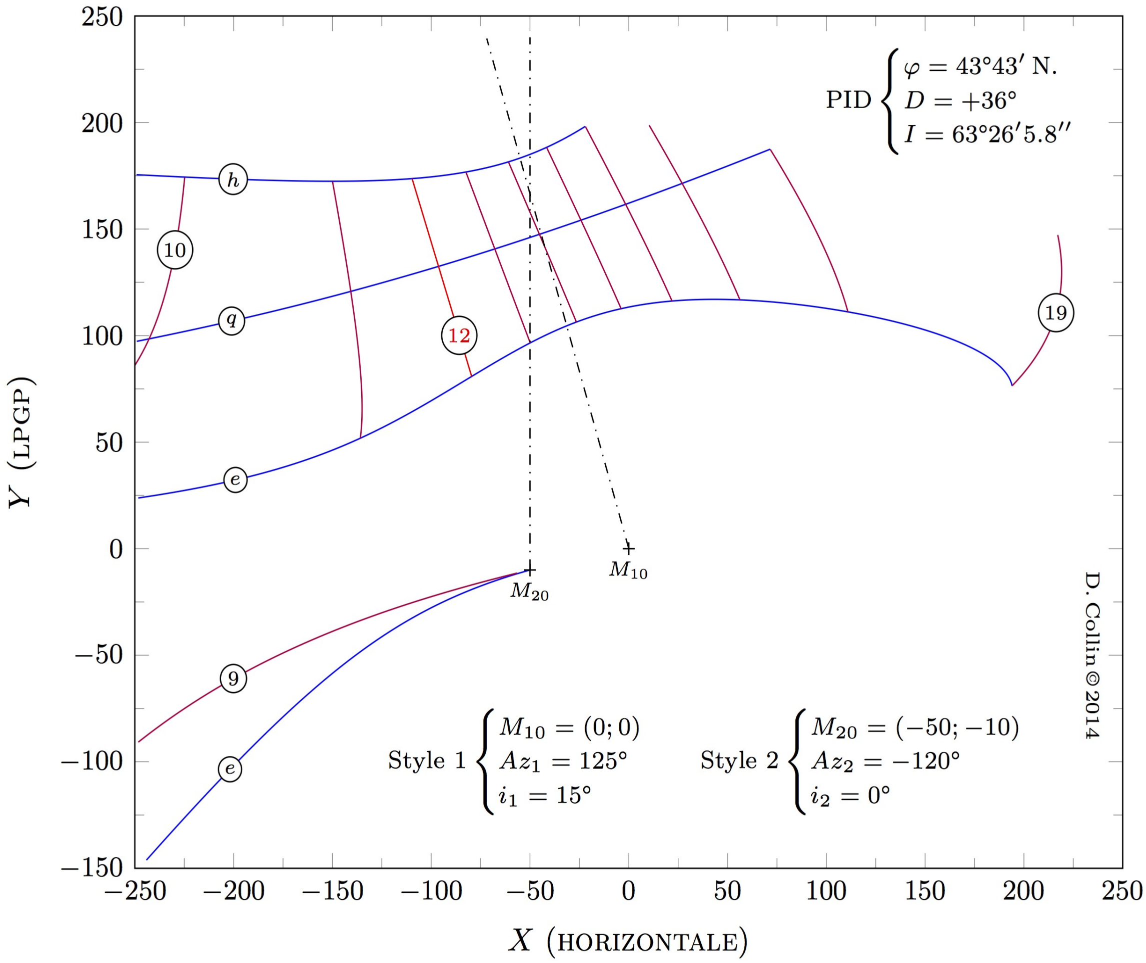


Figure 6. ***Cadran 2.***

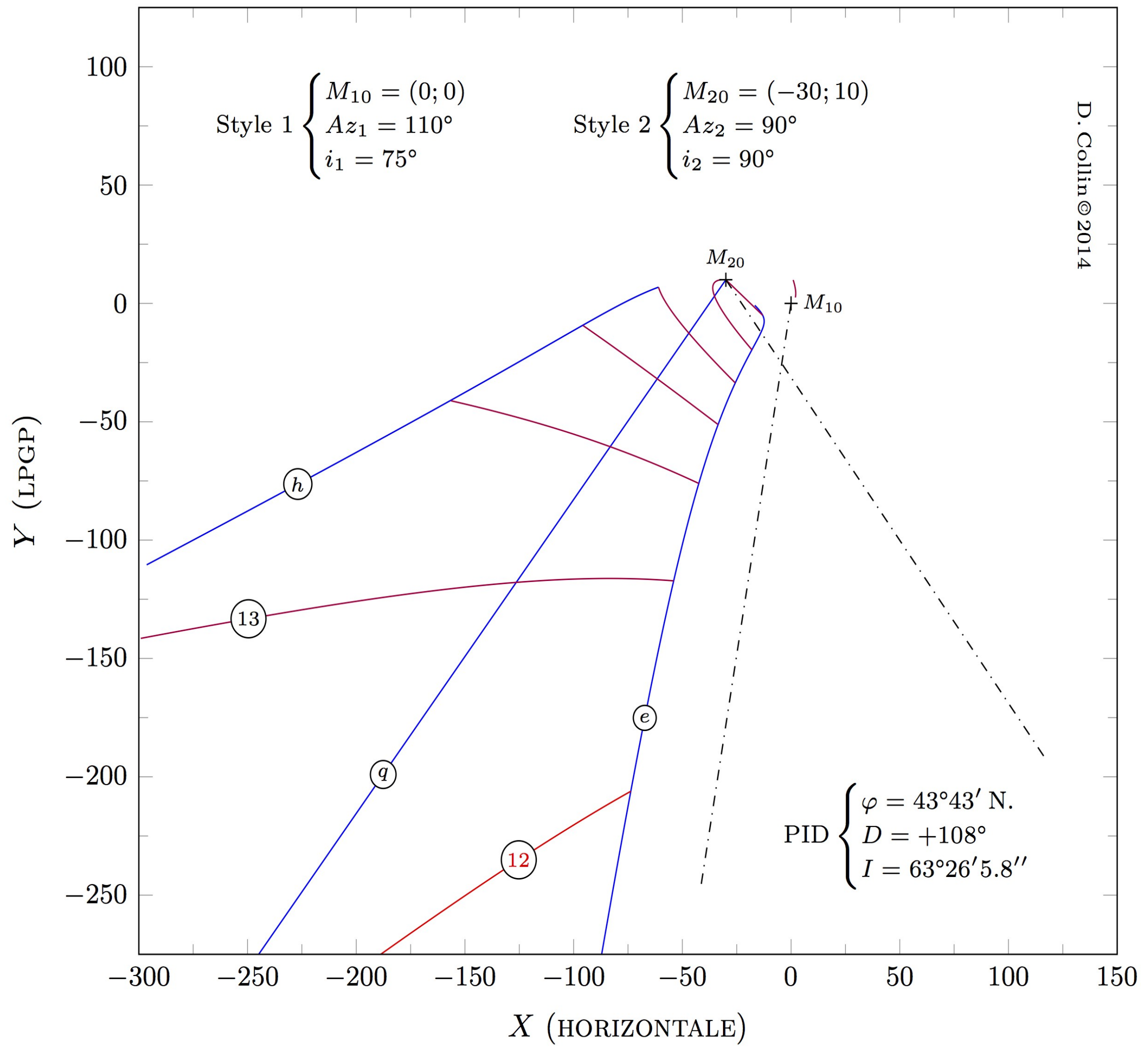


Figure 7. ***Cadran 3.***

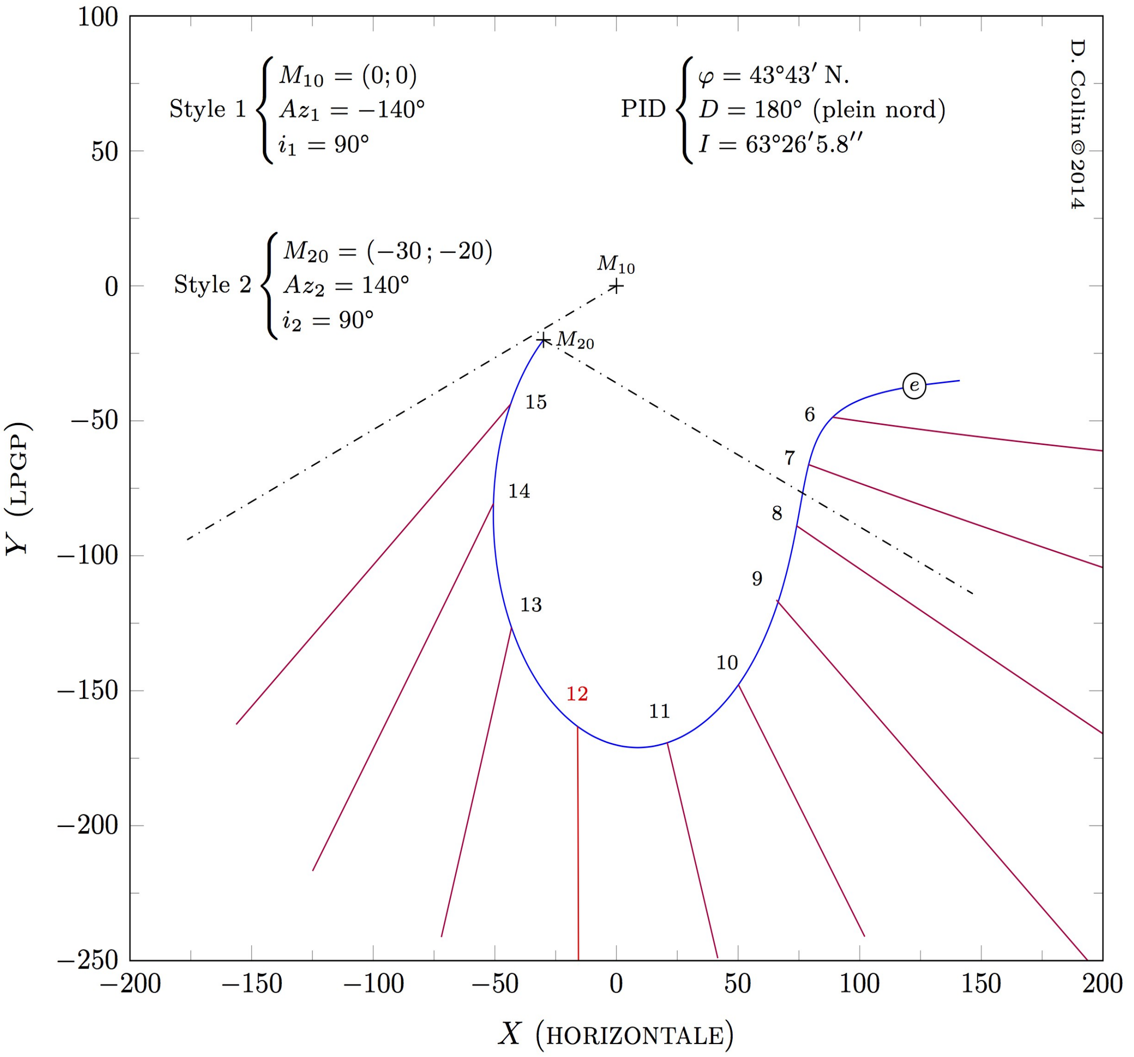


Figure 8. ***Cadran 4.***

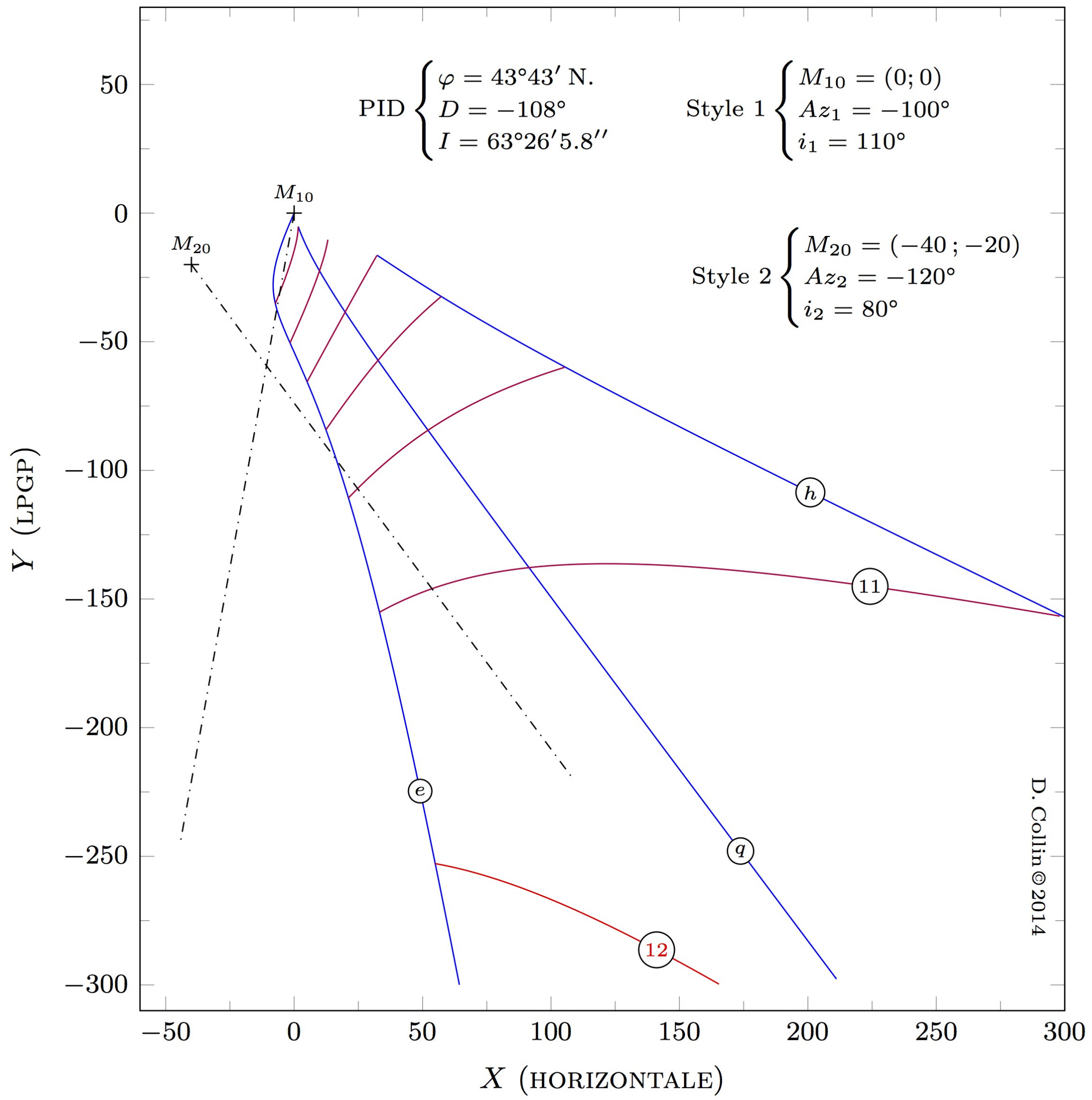


Figure 9. ***Cadran 5.***

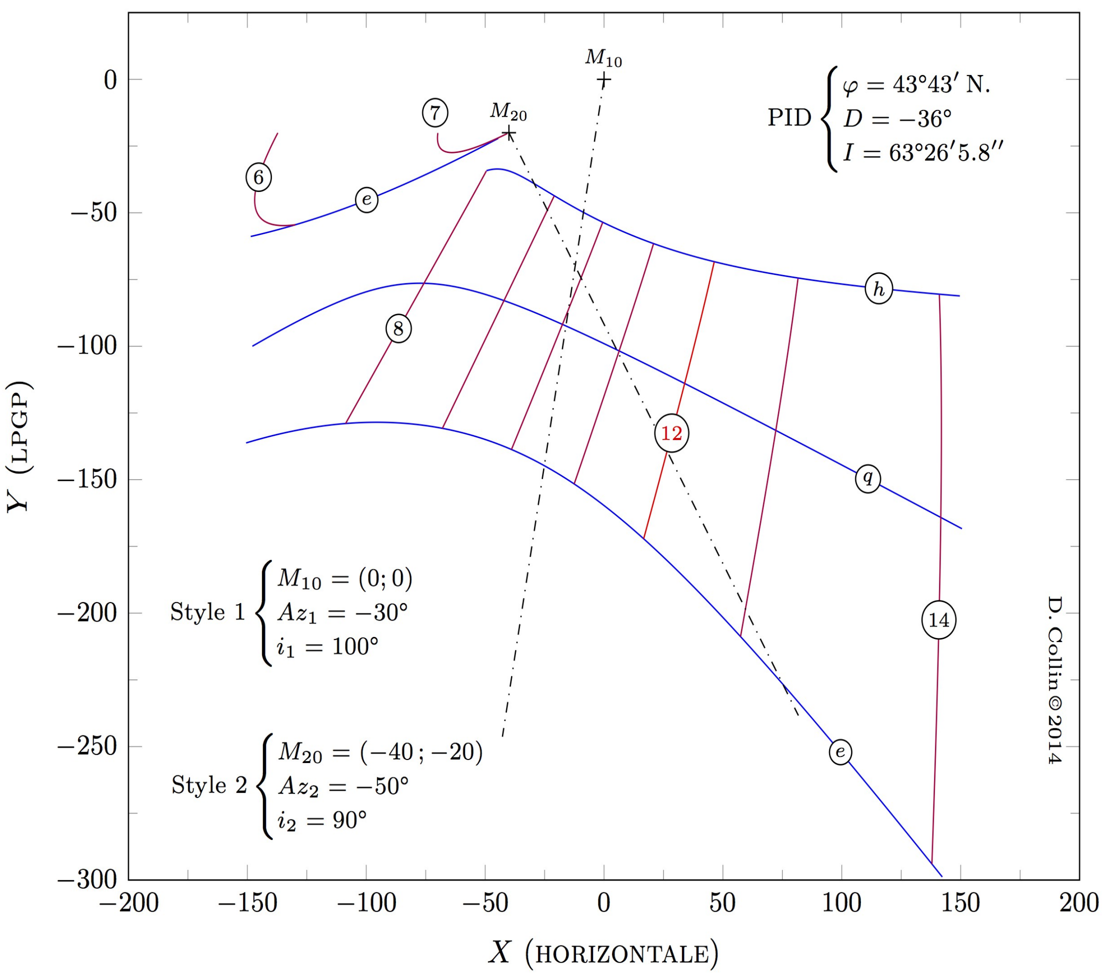
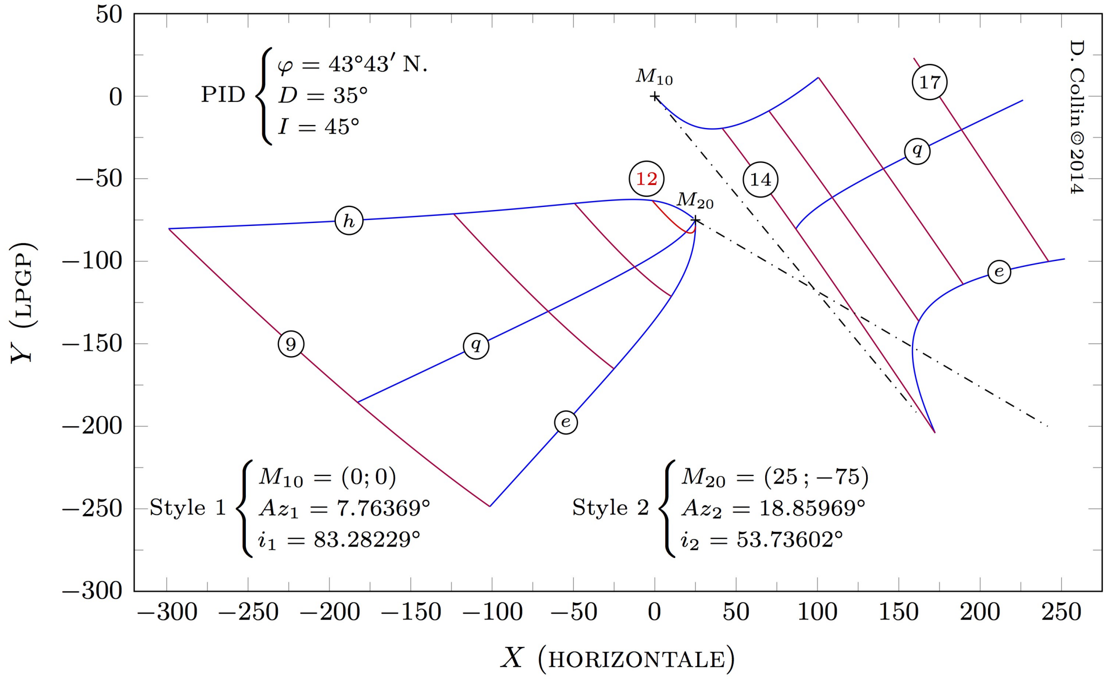


Tableau des caractéristiques des cadrans inclinés déclinants n°1 à 5

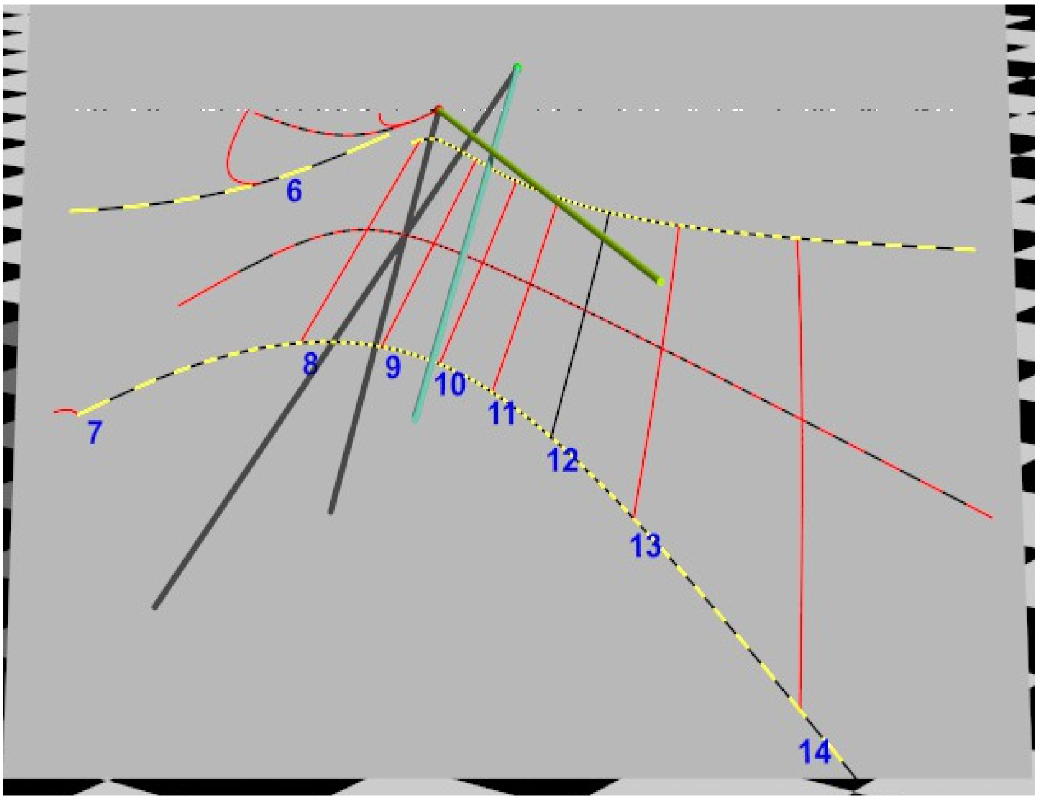
	Plan du cadran		***Fil 1***			***Fil 2***		
N°	Déclinaison (*D*)	Distance zénithale (*I*)	***Az₁***	***i₁***	Origine ***(x₁₀ ;y₁₀)***	***Az₂***	***i₂***	Origine ***(x₂₀ ;y₂₀)***
Cadran 1	+36°	63° 26' 5.8"	+125°	15°	(0 ; 0)	-120°	0°	(-50 ;-10)
Cadran 2	+108°	63° 26' 5.8"	+110°	75°	(0 ; 0)	+90°	90°	(-30 ; 10)
Cadran 3	180°	63° 26' 5.8"	-140°	90°	(0 ; 0)	+140°	90°	(-30 ;-20)
Cadran 4	-108	63° 26' 5.8"	-100°	110°	(0 ; 0)	-120°	80°	(-40 ;-20)
Cadran 5	-36°	63° 26' 5.8"	-30°	100°	(0 ; 0)	-50°	90°	(-40 ;-20)

(il s'agit des caractéristiques gnomoniques standards des fils. Pour un tracé sous *Hugo.0.4c*, voir §2-a.2 pour la conversion des paramètres avant leur introduction dans le logiciel).

Figure 10. Figure test pour le contrôle des caractéristiques des gnomons.
(cf. Paragraphe 2.a-2, exemple 2)



Remerciements.
Nous remercions tout particulièrement M. Baillet pour avoir dessiné sous Povray des cadrans solaires bifilaires sur des plans inclinés déclinants permettant, à partir de représentations 3D (c'est-à-dire par intersection d'objets solides), de valider d'une autre façon le formulaire très général de tels cadrans. Soulignons qu'aucune formule sur les coordonnées du point d'intersection des ombres des fils n'est programmée.



Cadran solaire bifilaire incliné déclinant à deux styles obliques
Image fourni par le logiciel Povray
(cadran n°5 – 8 h 30 min (temps vrai) aux équinoxes à Nice. Le fil de couleur cyan est le fil n°1)

⇨💻 Dans la version numérique, en annexe, le dossier "Bifilaire-2013 Collin" :

° le répertoire « Annexe_Article D. Collin_Mai2014 » contenant toutes les figures de l'article, avec les fichiers sources et leur « data » pour une compilation sous LaTeX,

° le texte original sous PdF

° les calculs sous Excel :

("PID_bifilaire_fils qcq_2013.xls" et "Theoreme Conique_CI29_v2.xlsx").